Méthode : résoudre une équation différentielle d'ordre 2

1 Coefficients constants

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : \ ay'' + by' + cy = d(t),$$

où a, b et c sont trois réels (*i.e.* des constantes qui ne dépendent pas de la variable t) et d une fonction continue sur un intervalle I.

Dans ce cas, on procède comme pour les équations différentielles d'ordre 1 en deux étapes :

1. on résout l'équation homogène associée $(H) : ay'' + by' + c = 0$;
2. on détermine une solution particulière y_P de (E).

1.1 Équation homogène associée

Pour résoudre l'équation homogène $(H) : ay'' + by' + c = 0$, on considère l'équation caractéristique $(EC) : ar^2 + br + c$ et on distingue plusieurs cas suivant la valeur du discriminant.

– Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les deux racines réelles de (EC), les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H(t) = \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t} \ \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

– Si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine double de (EC), les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H(t) = (\lambda + \mu t)\, e^{r_0 t} \ \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

– Si $\Delta < 0$, en notant r_1 et r_2 les deux solutions complexes conjuguées de (EC), les solutions *complexes* de (H) sont de la forme

$$y_H(t) = A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t} \ \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

Cependant, il est très souvent préférable d'obtenir les solutions *réelles*. Pour ce faire, on écrit l'une des deux racines sous forme algébrique : $r_1 = \alpha + \beta i$ (et dans ce cas $r_2 = \alpha - \beta i$). Les solutions *réelles* de (H) sont alors de la forme

$$y_H(t) = e^{\alpha t}\big(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\big) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1 – *Résoudre* $(H_1) : y'' - 4y' + 3y = 0.$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, le discriminant vaut $\Delta = 4 > 0$. Les racines sont 1 et 3 donc les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \lambda\, e^t + \mu\, e^{3t}$ avec λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 – *Résoudre* $(H_2) : y'' + y' + y = 0.$

L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = -3 < 0$. Les racines sont $r_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Pour déterminer les solutions réelles, écrivons $r_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme $t \longmapsto e^{-t/2}\Big(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\Big)$ avec λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

1.2 Recherche d'une solution particulière

Pour déterminer une solution particulière de (E), on regarde le second membre :

– s'il est constant, on cherche une solution particulière constante ;
– si c'est un polynôme, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de même degré ;
– s'il est sous forme d'un sin ou d'un cos, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de sin et cos (méthode identique à celle pour l'ordre 1, voir fiche correspondante) ;
– s'il est de la forme $d(t) = \gamma\, e^{\delta t}$, suivant si δ n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $k\, e^{\delta t}$, $kt\, e^{\delta t}$ ou $kt^2\, e^{\delta t}$.

Exemple 3 – *Solution particulière de* $(E_2) : y'' + 3y' + 5y = 2.$

Comme le second membre est constant, on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Cette fonction est deux fois dérivable et ses dérivées sont nulles d'où, en injectant dans (E_2), $5k = 2$.
Ainsi la fonction constante égale à $\frac{2}{5}$ est solution particulière de (E_2).

Exemple 4 – *Solution particulière de* (E_1): $y'' + y' + y = 8\,\mathrm{e}^{3t}$.

D'après l'exemple 1, 3 est racine simple de l'équation caractéristique associée donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = kt\,\mathrm{e}^{3t}$.
Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. On dérive deux fois en tant que produit et on injecte dans (E_1).
Après calculs et simplifications, il vient $2k\,\mathrm{e}^{3t} = 8\,\mathrm{e}^{3t}$ d'où $k = 4$.
Ainsi la fonction $t \longmapsto 4t\,\mathrm{e}^{3t}$ est solution particulière de (E_1).

1.3 Solutions générales et problème de Cauchy

Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, les solutions générales sont de la forme « solutions homogènes + solution particulière ».

Exemple 5 – *Résoudre l'équation* (E_1): $y'' + y' + y = 8\,\mathrm{e}^{3t}$.

On a déterminé les solutions homogènes dans l'exemple 1 et une solution particulière dans l'exemple 4, d'où

$$S = \left\{ t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \mu\,\mathrm{e}^{3t} + 4t\,\mathrm{e}^{3t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Enfin, si on dispose de deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$, on détermine les valeurs des constantes λ et μ et on obtient ainsi une unique solution au problème de Cauchy.

Un exemple complet en vidéo : `https://youtu.be/TTq9Xw-e0Ig`

2 Coefficients variables

2.1 Aucune méthode générale...

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E): \; a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t),$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues sur l'intervalle I, avec a qui ne s'y annule pas.

La principale chose à retenir est qu'il n'existe aucune méthode générale pour résoudre ce genre d'équation différentielle !
Il est donc important de suivre l'énoncé et s'y adapter : recherche de solutions sous une forme donnée, vérification que telle fonction est solution, etc.

2.2 ... mais un cas courant : avec les séries entières

On demande parfois de chercher une solution développable en série entière d'une équation différentielle (F) (d'ordre 1 ou 2). La démarche suivie est toujours la même :

1. On suppose qu'une fonction de la forme $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (F) sur un intervalle $]-R\,;R[$ avec $R > 0$.
2. On dérive f terme à terme, on injecte dans (F), on développe et on procède à des changements d'indice pour tout regrouper sous une seule somme.
3. On invoque l'unicité du développement en série entière afin d'obtenir une relation de récurrence concernant la suite des coefficients $(a_n)_n$.
4. Par récurrence, on obtient une expression des coefficients a_n.
5. On détermine le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ (souvent via la règle de d'Alembert).

$\rightsquigarrow$ Voir E3A PSI 2022 Q2.

2.3 Abaissement de l'ordre

Une autre méthode un tant soit peu générale que l'on peut croiser est celle de l'abaissement de l'ordre. Elle consiste à changer de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle d'ordre 1.

Un exemple détaillé en vidéo : `https://youtu.be/Ygp3w2f6VEI`

$\rightsquigarrow$ Voir E3A PC 2025 Q3.